МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ФГОУ СПО «Бузулукский строительный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к контрольной работе по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

для студентов III курса заочного отделения специальностей:

- Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.
- Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения;

Бузулук, 2010

ББК

Жупикова Н.В.

Методические указания к контрольной работе по дисциплине «Математика» для студентов III курса заочного отделения.- Бузулук: ФГОУ СПО «Бузулукский строительный колледж», 2010.

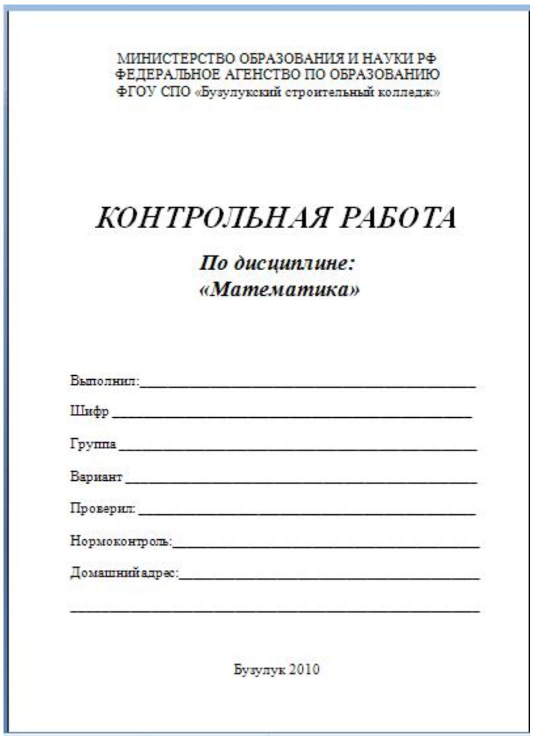
Методические указания созданы в помощь студентам III курса заочного отделения специальностей «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений», «Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения». В данном пособии указаны основные требования, предъявляемые к оформлению и выполнению домашней контрольной работы. Даны задания по вариантам для студентов, представлены примеры решения типовых задач, указана рекомендуемая литература и вопросы для самостоятельного изучения.

© Жупикова Н.В..

© ФГОУ СПО «Бузулукский строительный колледж», 2010

СОДЕРЖАНИЕ

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ФГОУ СПО «Бузулукский строительный колледж»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

По дисциплине:
«Математика»

Выполнил:________________

Шифр ________________

Группа ________________

Вариант ________________

Проверил: ________________

Нормоконтроль:________________

Домашний адрес:________________

Бузулук 2010

Контрольная работа должна содержать:

1. Титульный лист
2. Рецензия
3. Оглавление
4. Содержание работы
5. Список используемой литературы

<u>Работа выполняется вручную.</u>

Контрольная работа может быть выполнена по усмотрению студента:
- либо в обычной ученической тетради,
- либо на листах формата А4.

Титульный лист.
На титульном листе указывается название учебного заведения; дисциплина; номер группы; номер варианта; Ф. И. О студента, выполнившего контрольную работу; Ф. И. О. преподавателя, проверяющего контрольную работу; нормоконтроль; год выполнения контрольной работы.

Рецензия. Содержит один чистый лист для рецензии работы.

Оглавление. Содержит перечень заданий с указанием номеров страниц.

Содержание работы.
Каждый вариант контрольной работы содержит 9 заданий. Задания выполняются в указанном порядке. Условия заданий должны быть записаны полностью. Каждое задание начинается с новой страницы. В решении задач необходимо указать все используемые формулы; решение должно содержать комментарии или пояснения, указаны все расчеты и показаны все преобразования выполняемые с алгебраическими выражениями.

Список используемой литературы.
Литературные источники приводятся в следующем порядке: по алфавиту фамилии и инициалы авторов, точное название, место издания, издательство, год издания.
Пример: Зотова С. И. Практикум по MS Access. – М.: Финансы и статистика, 2003.

После выполнения контрольная работа сдается в методический кабинет заочного отделения, где регистрируется в журнале контрольных работ.
Далее преподаватель ее проверяет.
Студент должен ознакомиться с результатами проверки работы. Если работе не зачтена, то контрольная работа забирается студентом на доработку и, после устранения недостатков, вновь регистрируется и сдается в методический кабинет.

Номер варианта выбирается по последней цифре зачетной книжки.

ЦИФРА	*ВАРИАНТ*	*ЦИФРА*	*ВАРИАНТ*
1	1 вариант	6	6 вариант
2	2 вариант	7	7 вариант
3	3 вариант	8	8 вариант
4	4 вариант	9	9 вариант
5	5 вариант	0	10 вариант

Номера задач каждого варианта приведены в таблице:

Вариант	***Номера заданий***								
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90

Вопросы для самостоятельного изучения:

1. Определение предела. Теоремы о вычислении пределов.
2. Правила вычисления пределов. I замечательный предел.
3. Избавление от неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.
4. Производная. Формулы дифференцирования.
5. Правила дифференцирования.
6. Дифференцирование сложной функции.
7. Производные I и II порядков, их приложение.
8. Схема исследования функции с помощью производной.
9. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
10. Формулы интегрирования.
11. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменной.
12. Площадь криволинейной трапеции.
13. Дифференциальное уравнение. Определение. Общее и частное решение.
14. Однородное дифференциальное уравнение I порядка.
15. Линейное однородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами.
16. Случайная величина. Закон распределения случайной величины.
17. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Упражнение 1. Найти указанные пределы.

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2+x-1}=\dfrac{2^2-6*2+5}{2*2^2+2-1}=-\dfrac{3}{9}=-\dfrac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\dfrac{2*3^2-3*3-9}{3^2-3-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

При подстановке вместо переменно x ее предельного значения 3 получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для избавления от этого типа неопределенности в этом случае представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей, воспользовавшись известной формулой

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c. У нас $2x^2-3x-9=2(x-3)(x+\dfrac{3}{2})$, т.к. дискриминант квадратного трехчлена $D=9-4*2*(-9)=81$, а следовательно, $x_1=3, x_2=-\dfrac{3}{2}$.

Аналогично $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.

Теперь условие примера можно переписать а другом виде и продолжить решение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+\frac{3}{2})}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2*3+3}{3+2}=\frac{9}{5}.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Здесь сталкиваемся с неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{2}{3}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{tg^2 4x}$.

В данном случае для освобождения от возникшей неопределенности вида будем использовать I замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=1.$$

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{tg^2 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{tg4x*tg4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}*\frac{4x}{tg4x}*\frac{\sin 2x}{2x}*\frac{4x}{tg4x}*\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Упражнение 2. Найти производные, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

Решение:

Кроме формул дифференцирования нужно использовать правила дифференцирования (суммы, разности, произведения, частного).

Необходима и теорема о производной сложной функции:

если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то есть $y = f(\varphi(x))$; если каждая из функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ дифференцируема по своему аргументу, то

$$y' = y'_u * u'_x .$$

1) $y = (2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1)^6 = u^6$, $u = 2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1$,

$$y' = 6u^5u' = 6(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1)^5(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1)' =$$

$$= 6(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1)^5(10x^4 - \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}) = 6(2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1)^5(10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}).$$

2) $y = \dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$,

$$y' = \frac{(\cos 7x)' * \sqrt{1-3x^4} - \cos 7x(\sqrt{1-3x^4})'}{(\sqrt{1-3x^4})^2} =$$

$$= \frac{-\sin 7x * (7x)'\sqrt{1-3x^4} - \cos 7x \dfrac{1}{2\sqrt{1-3x^4}}(1-3x^4)'}{1-3x^4} =$$

$$= \frac{-7\sin 7x\sqrt{1-3x^4} - \dfrac{\cos 7x 1}{2\sqrt{1-3x^4}}(-12x^3)}{1-3x^4} = \frac{-7\sin 7x(1-3x^4) + 6x^3\cos 7x}{(1-3x^4)\sqrt{1-3x^4}}$$

3) $y = 3^{tgx}\sin 5x$

$$y = (3^{tgx})'\sin 5x + 3^{tgx}(\sin 5x)' = 3^{tgx}\ln 3\frac{1}{\cos^2 x}\sin 5x + 5 * 3^{tgx}\cos 5x$$

4) $y = \ln\arcsin 6x$

$$y' = \frac{1}{\arcsin 6x}(\arcsin 6x)' = \frac{1}{\arcsin 6x} * \frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}}(6x)' = \frac{1}{\arcsin 6x} * \frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}$$

Упражнение 3. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и начертить график.

Исследование функции и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции D(y);
2) найти точки экстремума функции и определить интервалы ее монотонности;

3) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;
4) найти асимптоты графика функции;
5) построить график, используя результаты предыдущих исследований;
6) дополнительно найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Решение:

Дана функция: $y=\frac{1}{4}(x^3+9x^2+15x-9;\_\ \alpha=-3;\_\ \beta=0$

1) Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента *x*, то есть D(y): $x\in(-\infty;+\infty)$, а это значит, что функция непрерывна на всей числовой прямой и график ее не имеет вертикальных асимптот.
2) Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю:

$$y'=(\frac{1}{4}(x^3+9x^2+15x-9))'=\frac{1}{4}(3x^2+18x+15)$$

$$\frac{1}{4}(3x^2+18x+15)=0$$

$$3x^2+18x+15=0$$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод о том, что функция имеет две критические точки I рода x_1 = -5, x_2 = -1. Разбиваем область определения этими точками на части и по изменению знака производной в них выявляем промежутки монотонности и наличие экстремума:

x	$(-\infty;-5)$	-5	$(-5;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$y_{\max}=y(-5)=\frac{1}{4}\left[(-5)^3+9(-5)^2+15(-5)-9\right]=4$$

$$y_{\min}=y(-1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^3+9(-1)^2+15(-1)-9\right]=-4$$

3) Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем II производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y''=(y')'=(\frac{1}{4}(3x^2+18x+15))'=\frac{1}{4}(6x+18)$$

$$y''=0\text{, т.е. }\frac{1}{4}(6x+18)=0$$

$$6x+18=0$$

$$x+3=0$$

$$x=-3$$

Итак, функция имеет одну критическую точку 2 рода $x=-3$. Разобьем область определения полученной точкой на части, в каждой из которой установим знак II производной:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;+\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	т.п.	$\cup$

Значение $x=-3$ является абсциссой точки перегиба графика функции, а ордината этой точки $y(-3)=\frac{1}{4}\left[(-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9\right]=0$

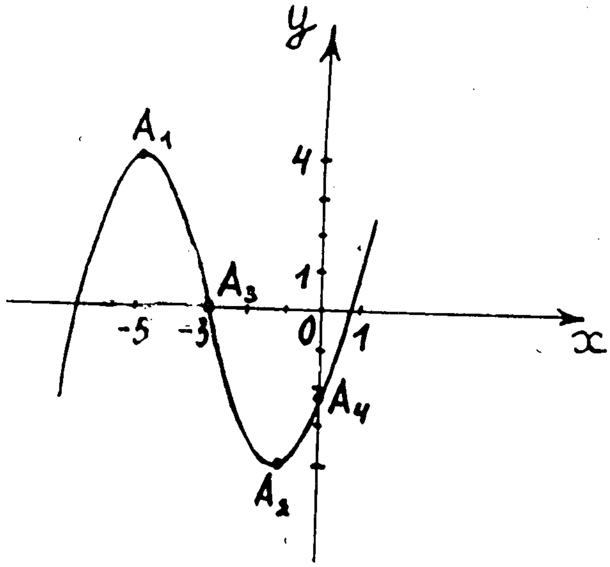
4) Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты $y=kx+b$ воспользуемся формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\_b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Имеем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}(x^3+9x^2+15x-9)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{4}(x^2+9x+15-\frac{9}{x})=\infty$.

Таким образом, у графика заданной функции наклонных асимптот нет.

5) Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точки максимума $A_1(-5; 4)$, минимума $A_2(-1; -4)$, перегиба A_3 (-3; 0) и точку пересечения графика с осью Oy A_4 $(0; -\frac{9}{4})$. С учетом результатов предыдущих исследований построим кривую.



6) Найдем наибольшее и наименьшее значения заданной функции на отрезке $[-3;0]$. Для этого посчитаем значения функции на концах этого отрезка, в критических точках I рода, попавших на отрезок, и сравним результаты:

$$y(-3)=0;\_y(-1)=-4;\_y(0)=-\frac{9}{4}.$$

Очевидно, что $\min\limits_{[-3;0]}f(x)=-4;\_\max\limits_{[-3;0]}f(x)=0$.

Упражнение 4. Задан закон *s(t)* изменения пути движения материальной точки; нужно найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0.

Решение:

Пусть $s(t)=3t^4-2t^3+t-1;\_t_0=2$.

Известно, что значения скорости и ускорения материальной точки в некоторый момент времени являются соответственно значениями в этот момент I и II производных функции, задающей закон изменения пути движения точки.

У нас $v=s'(t)=(3t^4-2t^3+t-1)'=12t^3-6t^2+1$

$v(2)=12*2^3-6*2^2+1=73$ (ед. ск.)

$a=v'=s''(t)=(12t^3-6t^2+1)'=36t^2-12t$

$a(2)=36*2^2-12*2=120$ (ед. уск.)

Упражнение 5. Найти неопределенные интегралы

а) способом подстановки (методом замена переменной) $\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x}$, $\int e^{2x^3+3} x^2 dx$;

б) применяя метод интегрирования по частям $\int (2x+8)\cos 7x dx$, $\int arctg 3x dx$.

Решение:

а) $\underline{\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x}}$: применим подстановку $t = \ln x$. Тогда $dt = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$ и

$$\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x} = \int t^8 dt = \frac{1}{9} t^9 + C = \frac{1}{9} (\ln x)^9 + C$$

$\underline{\int e^{2x^3+3} x^2 dx}$: применим подстановку $t = 2x^3 + 3$. Тогда $dt = (2x^3+3)' dx = 6x^2 dx$,

$\frac{1}{6} dt = x^2 dx$, откуда $\int e^{2x^3+3} x^2 dx = \int e^t \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} e^t + C = \frac{1}{6} e^{2x^3+3} + C$

б) $\underline{\int (2x+8)\cos 7x dx}$: применим формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$.

Положим $u = 2x+8,\_ dv = \cos 7x$. Тогда $du = 2dx,\_ v = \int \cos 7x dx = \frac{1}{7}\sin 7x$.

Следовательно,

$$\int (2x+8)\cos 7x dx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x - \frac{2}{7}\int \sin 7x dx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x + \frac{2}{49}\cos 7x + C.$$

$\underline{\int arctg 3x dx}$: положим $u = arctg 3x,\_ dv = dx$. Тогда $du = \frac{3}{1+9x^2} dx,\_ v = \int dx = x$.

Отсюда $\int arctg 3x dx = x arctg 3x - 3\int \frac{x dx}{1+9x^2}$. Применяя в последнем интеграле подстановку $t = 1 + 9x^2$, получаем $dt = 18x dx$, следовательно,

$$3\int \frac{x dx}{1+9x^2} = \frac{3}{18}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{18}\ln|t| + C = \frac{3}{18}\ln(1+9x^2) + C.$$

Отсюда $\int arctg 3x dx = x arctg 3x - \frac{3}{18}\ln(1+9x^2) + C$.

***Упражнение 6**. В*ычислить площадь плоской фигуры, ограниченную параболами.

$$y_1 = 2x^2 - x - 2;\_ y_2 = -x^2 + x - 1$$

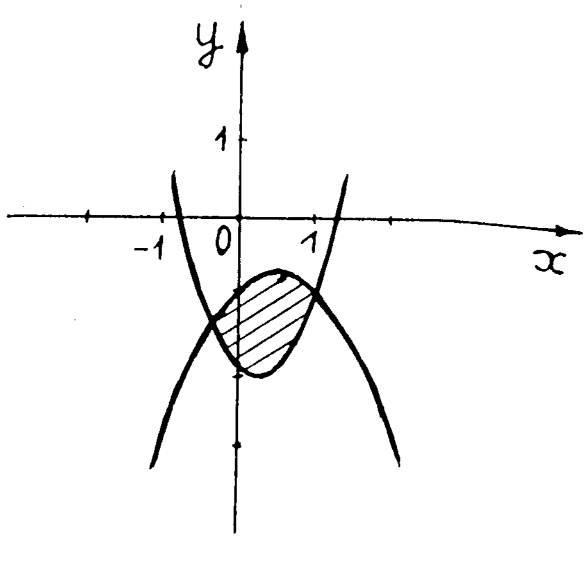
Решение:

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений: $2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1$.

Решаем полученное квадратное уравнение:

$3x^2 - 2x - 1 = 0,\_ D = 4 + 4*3 = 16$

$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1,\_ x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$.



Вычисление площади фигуры осуществляем по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$, где $f_1(x), f_2(x)$ - кривые, ограничивающие фигуру $(f_2(x) \geq f_1(x))$.

В нашем случае

$$S=\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1}\left[(-x^2+x-1)-(2x^2-x-2)\right]dx=\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1}\left[-3x^2+2x+1\right]dx=\left(-3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1}=\frac{34}{27}\text{ (кв. ед.)}$$

Упражнение 7. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

<u>Решение:</u>

Правая часть уравнения $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ обладает свойством

$f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}=f(x,y)$. Поэтому заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением I порядка. Совершим замену $u=\dfrac{y}{x}$, где u - некоторая функция от аргумента x. Отсюда $y=ux,\_\ y'=u'x+u$. Исходное уравнение приобретает вид $u'x+u\dfrac{2x*ux}{x^2-u^2x^2}=\dfrac{2u}{1-u^2}$.

Продолжаем преобразования: $u'x=\dfrac{2u}{1-u^2}-u=\dfrac{2u-u^3}{1-u^2}=\dfrac{u(1+u^2)}{1-u^2}$; $\dfrac{du}{dx}x=\dfrac{u(1+u^2)}{1-u^2}$.

Производим разделение переменных: $\dfrac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)}=\dfrac{dx}{x}$.

После интегрирования обеих частей уравнения получаем

$$\int\frac{1+u^2-2u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{du}{u}-\int\frac{2u^2du}{u(1+u^2)}=\ln u-\int\frac{2u}{1+u^2}du=\ln u-\ln(1+u^2)+\ln C;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x.$$

Таким образом $\ln u-\ln(1+u^2)+\ln C=\ln x$; $\ln\left[C\dfrac{u}{1+u^2}\right]=\ln x$.

Потенцируя, находим $C\dfrac{u}{1+u^2}=x$ или $C\dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=x$; $\dfrac{Cxy}{x^2+y^2}=x$.

Итак, общий интеграл исходного уравнения приобретает вид

$Cy=x^2+y^2$, где C – произвольная постоянная.

Упражнение 8. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y''-6y'+8y=0,\_\ y(0)=1,\_\ y'(0)=2$

б) $y''-8y'+16y=0,\_\ y(0)=2,\_\ y'(0)=5$

в) $y''-4y'+13y=0,\ y(\pi)=0,\ y'(\pi)=1$

Решение:

а) Для заданного дифференциального уравнения $y''-6y'+8y=0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2-6k+8=0$ по принципу: $y''=k^2,\ y'=k^1=k,\ y=k^0=1$. Решаем полученное квадратное уравнение и получаем два вещественных разных корня $k_1=2,\ k_2=4$.

Т.к. $k_1\neq k_2$, то общее решение данных уравнений записывается в виде $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$. В нашем случае $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$, где $C_1,\ C_2$ - произвольные постоянные.

Отсюда $y'(x)=(C_1e^{2x}+C_2e^{4x})'$, $y'(x)=2C_1e^{2x}+4C_2e^{4x}$.

Используя начальные условия $y(0)=1$: $C_1e^{2*0}+C_2e^{4*0}=1$, т.е. $C_1+C_2=1$.

Из того что $y'(0)=2$ следует $2C_1e^{2*0}+4C_2e^{4*0}=2$, т.е. $2C_1+4C_2=2$, $C_1+2C_2=1$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1+2C_2=1 \end{cases}$, получаем $C_1=1,\ C_2=0$.

Теперь в наше общее решение $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ подставим найденные значения $C_1=1,\ C_2=0$. Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, приобретает вид $y=e^{2x}$.

б) Для заданного дифференциального уравнения $y''-8y'+16y=0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2-8k+16=0$ по принципу: $y''=k^2,\ y'=k^1=k,\ y=k^0=1$. Решаем полученное квадратное уравнение и получаем два равных вещественных корня $k_1=k_2=4$.

Т.к. $k_1=k_2$, то общее решение данных уравнений записывается в виде $y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$. В нашем случае $y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$, где $C_1,\ C_2$ - произвольные постоянные.

Отсюда $y'(x)=(C_1e^{4x}+C_2xe^{4x})'$, $y'(x)=4C_1e^{4x}+C_2e^{4x}+4C_2xe^{4x}$.

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений для определения $C_1,\ C_2$: $\begin{cases} C_1+C_2=2 \\ 4C_1+C_2=5 \end{cases}$. Решая систему, получаем $C_1=1,\ C_2=1$.

Искомое частное решение имеет вид: $y=e^{4x}+xe^{4x}=e^{4x}(x+1)$

в) Для заданного дифференциального уравнения $y''-4y'+13y=0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$. Решая это уравнение, убеждаем, что оно не имеет вещественных корней.

В этом случае общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\alpha=-\frac{p}{2},\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},\ (p,q$ - коэффициенты характеристического уравнения).

У нас $\alpha=2,\ \beta=3$ поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x$.

Отсюда

$y'(x)=(C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x)'=$

$=2C_1e^{2x}\cos 3x-3C_1e^{2x}\sin 3x+2C_2e^{2x}\sin 3x+3C_2e^{2x}\cos 3x$.

Таким образом, для определения значений C_1, C_2 исходя из начальных условий, получаем систему уравнений $\begin{cases} C_1 e^{2\pi} = 0 \\ 2C_1 e^{2\pi} - 3C_2 e^{2\pi} = 1 \end{cases}$,

решая которую имеем $C_1 = 0, C_2 = -\frac{1}{3} e^{-2\pi}$.

Итак, искомое частное решение приобретает вид

$$y = -\frac{1}{3} e^{-2\pi} e^{2x} \sin 3x = -\frac{1}{3} e^{2(x-\pi)} \sin 3x$$

Упражнение 9. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Найти закон распределения величины X, если известно, что математическое ожидание M (x) = 1,4, дисперсия D (x) = 0,24 и вероятность p_1 того, что X примет значение x_1, равна 0,6.

Решение:

Так как сумма вероятностей всех возможных значений X равна 1, то вероятность p_2 того, что X примет значение x_2, равна $p_2 = 1 - p_1 = 1 – 0,6 = 0,4$.

Напишем закон распределения X:

X	x_1	x_2
p	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 составим два уравнения.

Для составления первого уравнения воспользуемся тем, что математическое ожидание M(x) определяется по формуле $M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$

В нашем случае: $M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2$

Учитывая, что по условию M(x) = 1,4, можем записать первое уравнение:

$$0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4.$$

Учитывая, что по условию D(x) = 0,24, пользуясь формулой $D(x) = M(X^2) – [M(X)]^2$, напишем второе уравнение:

$$0{,}6\, x_1^2 + 0{,}4\, x_2^2 - 1{,}4^2 = 0{,}24, \text{ или}$$
$$0{,}6\, x_1^2 + 0{,}4\, x_2^2 = 2{,}2.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем два решения:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ и } x_1 = 1{,}8,\ x_2 = 0{,}8.$$

По условию, $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение.

Окончательно получим искомый закон распределения:

X	1	2
p	0,6	0,4

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

В задачах 1-10 найти указанные пределы:

№ 1.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg 2x}{\sin 3x}$

№ 2.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x - 3x^2}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x \cos 3x}$

№ 3.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x tg 3x}{\sin^2 2x}$

№ 4.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{14 - x - 3x^2}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x * tg 3x}{x^2}$

№ 5.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x + 5}$; а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{tg 2x}$

№ 6.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{4x^2 - 5x + 1}{3x - x^2 - 2}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x \cos 5x}{\sin 3x}$

№ 7.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x - 14}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x * tg 4x}{\sin^2 6x}$

№ 8.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2x^2 - 7x + 6}{6 - x - x^2}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x * tg 4x}{x^2}$

№ 9.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - 6x - 7}{3x^2 + x - 2}$; а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{tg 5x}$

№ 10.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2 + x - 4}{4x - x^2 - 3}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x \cos 7x}{\sin 2x}$

В задачах 11-20 найти производные, пользуясь правилами и формулами дифференцирования:

№ 11.

а). $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$

б). $y=\dfrac{4x+7tgx}{\sqrt{1+9x^2}}$

в). $y=\cos 3x * e^{\sin x}$

г). $y=\ln arctg\,2x$

№ 12.

а). $y=(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$

б). $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$

в). $y=2^{3x}tg2x$

г). $y=\cos\ln 5x$

№ 13.

а). $y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$

б). $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$

в). $y=e^{tgx}\ln 2x$

г). $y=\cos\sqrt{x^2+3}$

№ 14.

а). $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$

б). $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$

в). $y=2^{8x}tg3x$

г). $y=\arcsin\ln 4x$

№ 15.

а). $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$

б). $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx}$

в). $y=e^{ctgx}*\sin 4x$

г). $y=\sin\ln 5x$

№ 16.

а). $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$

б). $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$

в). $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$

г). $y=\ln\sin 6x$

№ 17.

а). $y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$

б). $y=\dfrac{arctg7x}{2-9x^2}$

в). $y=e^{ctgx}\cos 6x$

г). $y=\sin\ln 2x$

№ 18.

а). $y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$

б). $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$

в). $y=4^{\cos z}arctg2x$

г). $y=\ln\cos 5x$

№ 19.

а). $y=(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2)^5$

б). $y=\dfrac{\cos 6x}{\sin 3x}$

в). $y=e^{x^3}tg7x$

г). $y=\arcsin\ln 2x$

№ 20.

а). $y=(x^4+2\sqrt[3]{x}+1)^2$

б). $y=\dfrac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-ctgx}$

в). $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$

г). $y=\ln\cos 7x$

В задачах 21-30 исследовать функцию методами дифференциального исчисления и начертить график:

№ 21
$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x; \_ \alpha = -1; \_ \beta = 3$

№ 22
$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1; \_ \alpha = -1; \_ \beta = 2$

№ 23
$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10; \_ \alpha = 2; \_ \beta = 4$

№ 24
$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10; \_ \alpha = -1; \_ \beta = 2$

№ 25
$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2; \_ \alpha = 0; \_ \beta = 4$

№ 26
$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5; \_ \alpha = -2; \_ \beta = 3$

№ 27
$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x; \_ \alpha = -1; \_ \beta = 3$

№ 28
$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7; \_ \alpha = -3; \_ \beta = 1$

№ 29
$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32; \_ \alpha = 1; \_ \beta = 4$

№ 30
$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20; \_ \alpha = -1; \_ \beta = 4$

В задачах 31-40 задан закон *s(t)* изменения пути движения материальной точки; нужно найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0:

№ 31
$s(t) = 2t^4 - 3t^2 + t - 2; \_ t_0 = 2$

№ 32
$s(t) = 3t^4 - 2t^2 - t + 1; \_ t_0 = 1$

№ 33
$s(t) = 4t^4 - 3t^2 - 2t - 1; \_ t_0 = 2$

№ 34
$s(t) = t^4 + t^2 - 3t + 1; \_ t_0 = 1$

№ 35
$s(t) = 2t^4 - 2t^2 + t - 2; \_ t_0 = 2$

№36
$s(t) = 3t^4 - t^2 + 2t + 1; \_ t_0 = 1$

№ 37
$s(t) = 4t^4 - 3t^2 - t + 2; \_ t_0 = 2$

№ 38
$s(t) = 2t^4 + 4t^2 - 5t - 1; \_ t_0 = 1$

№ 39
$s(t) = 3t^4 + t^2 - 2t + 1; \_ t_0 = 2$

№ 40
$s(t) = 4t^4 + 2t^2 - 7t - 3; \_ t_0 = 1$

В задачах 41-50 найти неопределенные интегралы
а) способом подстановки (методом замены переменной),
б) применяя метод интегрирования по частям:

№ 41

а) $\int \sqrt{\cos x}\,\sin x dx$

б) $\int \ln x dx$

№ 42

а) $\int (\ln x)^3 \dfrac{dx}{x}$

б) $\int (2x+1)\sin 3x dx$

№ 43

а) $\int \dfrac{arctgx}{1+x^2}dx$

б) $\int (x-1)e^{2x}dx$

№ 44

а) $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

б) $\int x\cos 2x dx$

№ 45

а) $\int e^{-x^2}x dx$

б) $\int arctg 2x dx$

а) $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

б) $\int x^3 \ln x dx$

№ 47

а) $\int \dfrac{x^2}{2x^3+3}dx$

б) $\int (3x+7)\cos 5x dx$

№ 48

а) $\int \sqrt{5x^4+3x^3}dx$

б) $\int (12x+2)\sin 3x dx$

№ 49

а) $\int x^2 e^{x^3+1}dx$

б) $\int \sqrt[3]{x}\ln 2x dx$

№ 50

а) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}}dx$

б) $\int x\sin 8x dx$

№ 46

В задачах 51-60 вычислить площадь плоской фигуры, ограниченную параболами:

№ 51

$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1;\_\,y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$

№ 52

$y_1 = \frac{1}{2}x^2 + x + 2;\_\,y_2 = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 9$

№ 53

$y_1 = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2;\_\,y_2 = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$

№ 54

$y_1 = 2x^2 + 6x - 3;\_\,y_2 = -x^2 + x + 5$

№ 55

$y_1 = 3x^2 - 5x - 1;\_\,y_2 = -x^2 + 2x + 1$

№ 56

$y_1 = 2x^2 - 6x + 1;\_\,y_2 = -x^2 + x - 1$

№ 57

$y_1 = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4;\_\,y_2 = -\frac{2}{3}x^2 - x + 6$

№ 58

$y_1 = x^2 - 5x - 3;\_\,y_2 = -3x^2 + 2x - 1$

№ 59

$y_1 = x^2 - 2x - 5;\_\ y_2 = -x^2 - x + 1$

№ 60

$y_1 = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5;\_\ y_2 = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1$

В задачах 61-70 найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка:

№ 61

$y' = \frac{x + 8y}{8x + y}$

№ 62

$xyy' = x^2 + y^2$

№ 63

$y' = \frac{x + y}{x - y}$

№ 64

$xy' + xtg\frac{y}{x} = y$

№ 65

$xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$

№ 66

$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

№ 67

$xyy' = x^2 - y^2$

№ 68

$(x - y)y' = 2x + y$

№ 69

$xy' + y\ln^2\frac{y}{x} = 0$

№ 70

$xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$

В задачах 71-80 найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами:

№ 71

$y'' - 7y' + 10y = 0,\_\ y(0) = 2,\_\ y'(0) = -1$

№ 72

$y'' + 2y' + 10y = 0,\_\ y(\frac{\pi}{2}) = 0,\_\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1$

№ 73

$y'' - 6y' + 9y = 0,\_\ y(0) = 1,\_\ y'(0) = 0$

№ 74

$y'' + 8y' + 7y = 0,\_\ y(0) = 2,\_\ y'(0) = 1$

№ 75

$y'' + 9y = 0,\_\ y(\pi) = 0,\_\ y'(\pi) = 1$

№ 76

$y'' - 7y' + 12y = 0,\_\ y(0) = 2,\_\ y'(0) = -2$

№ 77

$y'' + 9y' = 0,\_\ y(0) = 1,\_\ y'(0) = -3$

№ 78

$y'' - 3y' + 2y = 0,\_\ y(0) = 0,\_\ y'(0) = 1$

№ 79

$y'' - 5y' + 6y = 0,\_\ y(0) = 5,\_\ y'(0) = 0$

№ 80

$y'' - 2y' + 5y = 0,\_\ y(0) = -1,\_\ y'(0) = 0$

В задачах 81-90 найти закон распределения дискретной случайной величины, если известно, что: дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$; известна вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M (x) и дисперсия D (x):

№ 81
$p_1 = 0{,}1$; $M(x) = 3{,}9$; $D(x) = 0{,}09$;

№ 82
$p_1 = 0{,}3$; $M(x) = 3{,}7$; $D(x) = 0{,}21$;

№ 83
$p_1 = 0{,}5$; $M(x) = 3{,}5$; $D(x) = 0{,}25$;

№ 84
$p_1 = 0{,}7$; $M(x) = 3{,}3$; $D(x) = 0{,}21$;

№ 85
$p_1 = 0{,}9$; $M(x) = 3{,}1$; $D(x) = 0{,}09$;

№ 86
$p_1 = 0{,}9$; $M(x) = 2{,}2$; $D(x) = 0{,}36$;

№ 87
$p_1 = 0{,}8$; $M(x) = 3{,}2$; $D(x) = 0{,}16$;

№ 88
$p_1 = 0{,}6$; $M(x) = 3{,}4$; $D(x) = 0{,}24$;

№ 89
$p_1 = 0{,}4$; $M(x) = 3{,}6$; $D(x) = 0{,}24$;

№ 90
$p_1 = 0{,}2$; $M(x) = 3{,}8$; $D(x) = 0{,}16$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов. - М.: Дрофа, 2006. - 395 с.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - М.: Высш. шк., 2002. - 495 с.
3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. - М.: Дрофа, 2003. - 208 с.
4. Валуцэ И.И. Математика для техникумов. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.мат. лит., 1990 – 576 с.: ил.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. - М.: ООО "Издательство Оникс", 2006. - 416 с.
6. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов - М.: ЮНИТИ, 2002. - 471 с.
7. Пехлецкий И.Д. Математика. - М.: Издательский центр "Академия", 2002. - 304 с.
8. Соловейчик И.Л. Сборник задач по математике с решениями для техникумов. - М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век", 2003. - 464 с.